

مقدمه ناشر

سلام به دوستان عزیزمون، دانش‌آموزای خوب رشته انسانی

دقت کردید وقتی سطح یه مسابقه بالا می‌ره، قواعد پیروزی تو اون مسابقه مدام پیچیده‌تر می‌شه و استراتژی‌های شرکت‌کننده‌ها مدام متنوع‌تر؟ مثلاً یه جمع دوستانه که قرار می‌دارن با هم برن فوتبال، احتمالاً نیم ساعت به مسابقه یه کفش و لباسی برمی‌دارن و می‌رن تو میدون و تازه سر بازی می‌فهمن کی به کیه و کی تو تیم کیه و پست هر کسی چیه، منتها وقتی همین مسابقه، بشه مسابقه دوتا تیم باشگاهی معتبر تو یه جام مهم، از ماه‌ها قبلش کلی تاکتیک و استراتژی تعیین می‌شه، بازی‌های تیم خودی و حریف آنالیز می‌شه، برای هر بازیکن وظایف مشخصی تعریف می‌شه و بازیکن‌ها مدت‌ها برای هر کدوم از این تاکتیک‌ها تمرین می‌کنن.

حکایت کنکور انسانی هم همینه، ما که چندین ساله کنار دانش‌آموزای انسانی هستیم و سعی می‌کنیم تو مسیر پر پیچ و خم کنکور همه‌جوره کمکشون کنیم، به وضوح دیدیم که هم کنکور و هم دانش‌آموزای انسانی سال به سال جدی‌تر شدن و سطحشون بالاتر رفته. دانش‌آموزای انسانی هر سال آماده‌تر و با داشته‌های بیشتری رفتن سراغ مسابقه مهم کنکور.

طبیعتاً هر چه قدر این رقابت پیچیده‌تر می‌شه، نیازها و چالش‌ها هم متنوع‌تر می‌شه. ما و شما که تو این مسیر همراه همیم باید خودمون رو برای این نیازها و چالش‌های جدید آماده کنیم، ما با پیش‌بینی چالش‌های جدید مسیر کنکور و آماده کردن محتوای متناسب با اون‌ها و شما با انتخاب بهترین محتواها و خوندن دقیق و درستشون.

سبد فصل‌آموزی، به همین دلیل متولد شد. ما با خیلی از همراه‌ها و دوستای هم‌مسیر شما مشورت کردیم. با رتبه‌های تک‌رقمی کنکورهای سال‌های قبل، با مشاورهای کاربلد، با معلم‌های حرفه‌ای و به این نتیجه رسیدیم علاوه بر کتاب‌های متنوعی که تا الان داشتیم، باید به طور خاص روی یکی از نیازهای شما متمرکز بشیم: تسلط به آزمون‌دادن در هر درس، اون هم آزمون‌های کاملاً استاندارد و کنکوری. کتاب‌های فصل‌آموزی برای پاسخگویی به این نیاز طراحی شدن. مجموعه‌ای از آزمون‌های تک‌درس (که تمام یا بخشی از مضمون یک درس رو پوشش می‌دن)، آزمون‌های تجمعی (که مضمون چند درس رو پوشش می‌دن)، آزمون‌های جامع و شبیه‌ساز کنکور (که از دروس یک پایه تا مجموعه دروس هر سه پایه رو به سبک کنکور پوشش می‌دن) و آزمون‌های به سوی صد (آزمون‌های سفت‌تر برای دانش‌آموزانی که می‌خوان با تست‌های سفت‌تر دست و پنجه نرم کنن).

تلاش کردیم هر کدوم از این آزمون‌ها به معنای واقعی کلمه یه «آزمون» باشن با رعایت همه ملزومات یک آزمون، نه فقط یه تعداد تست از یه مبحث مشخص. تست‌ها کاملاً در سطح کنکور و مشابه تیپ‌های تستی کنکور هستن، نه سخت‌تر، نه ساده‌تر. تنها جایی که یه کم از این قاعده دور شدیم آزمون‌های به سوی صد، (که توش سفت‌ترین تستای کنکور رو مینا قرار دادیم) و بعضی از مدل‌ها و تیپ‌های تستی‌ای که حدس زدیم ممکنه تو کنکورهای آینده باهاشون مواجه بشید و تا الان سابقه نداشتن. امیدوارم به هدفمون رسیده باشیم و این کتاب‌ها حسابی براتون مفید باشن.

راه‌های ارتباط با ما رو که می‌دونید، اگر نظری، انتقادی، پیشنهادی برامون داشتید، خوشحال می‌شیم بدونیم. اما اگر حس می‌کنید تو یک یا چندتا درس خاص، توانایی ویراستاری، تألیف یا هر نوع همکاری دیگه‌ای با ما رو دارید، می‌تونید رزومه، کارنامه، ایده‌ها یا نمونه کارهاتون در زمینه کنکور رو برای ما به این ایمیل بفرستید: talent@kheilisabz.com

در پایان باید چندتا تشکر بکنم از مؤلفای خوب کتاب: آقای علی شهبابی و خانم کوثر صادقی که با تلاش و دقت فراوان، سعی کردن کتاب در بهترین سطح آماده بشه.

و از دوستان پرتلاشمون در واحد تولید که تو اجرای این پروژه واقعاً سختی کشیدن و سنگ تموم گذاشتن.

مقدمه مؤلفان

۱ مقدمه!

ما آدما در طول زندگی مون کلی آزمون می‌دیم. تو خیلی از اونا موفق می‌شیم و تو بعضیاشون موفق نمی‌شیم! از آزمونایی که توشون موفق نمی‌شیم، باید تجربه کسب کنیم و تو آزمونای مشابهشون تو زندگی مون استفاده کنیم. تجربه چیز خوبیه!

کتاب آزمون، ابزار کسب تجربه‌س برای آزمونای آزمایشی و کنکور.

۲ درباره کتاب

• کتاب شامل ۸ فصل هست. ۷ فصل اول، همان فصول کتاب درسی تان (البته با کمی جابه‌جایی و ادغام) و فصل آخر هم، آزمون‌های جامع (یه دونه پایه، یه دونه دوازدهم و سه‌تا جامع کنکوری)

• ۴ مدل آزمون در ۷ فصل اول کتاب می‌بینید:

(۱) مبحثی: هر موضوع مهم یک مبحث شده و یک آزمون ۱۰ تستی در آن طرح شده است (البته به ندرت این آزمون‌ها، ۲۰ تستی هم شده‌اند!)

(۲) تجمعی: در جاهایی که نیاز بوده چندتا آزمون مبحثی با هم ادغام شوند و سؤال بیشتری از آن مباحث حل شود، یک آزمون تجمعی ۱۰ تستی هم آورده‌ایم؛ مثلاً در فصل‌های تابع و آمار، «تجمعی دهم» و «تجمعی یازدهم» داریم.

(۳) جامع فصل: در هر فصل، یک آزمون جامع ۲۰ تستی از کل مباحث مهم آن فصل آورده‌ایم.

(۴) به سوی صد: آزمون به سوی صد، یک پله از سطح کنکور بالاتر است و در آن سؤالات به مراتب دشوارتری را می‌بینید، تعداد تست‌های این آزمون‌ها ۱۵ تا است.

• سطح کلی تست‌های کتاب: با توجه به کنکورهای اخیر و با در نظر گرفتن این موضوع که شما قبل از این کتاب، قطعاً کتاب تست هم داشته‌اید، تست‌های این کتاب کمی سخت‌تر و حرفه‌ای‌تر طرح شده‌اند. البته در کتاب، گاهاً تست‌های ساده هم می‌بینید ولی خیلی خیلی کم! در کل برای کسی که کتاب تستش را کامل حل کرده و دنبال کتابی برای جمع‌بندی ریاضی انسانی می‌گردد، گزینه مناسبی است.

۳ تشکر

دوستان زیادی در تک‌تک مراحل این کتاب به ما کمک کرده‌اند. از همشون ممنونیم و دوستشون داریم:

- دکتر کمیل نصری و مهندس سبزمیدانی عزیز
- دکتر سعید احمدپور، مدیر تألیف کتاب که واقعاً به من لطف دارن. مرسی که انقدر اعتماد دارین.
- خانم لولواو مرادی که زحمت تمام هماهنگی‌های کتاب رو کشیدن. مرسی از صبر و حوصله تون.
- تشکر ویژه از مهندس بقایی عزیز و تمام تیم تولید.
- از ویراستاران عزیزمون که خیلی زحمت کشیدن: خانم‌ها زهرا فتحی و نرجس تیمناک.
- دوستان عزیزم در خیلی سبز: ایمان سلیمان‌زاده، نوید شاهی، کوشا نشتایی و رسول محسنی‌منش.
- استاد عزیزم آقای محمدی‌نژاد که همیشه مشورت‌های خوبی به ما دادن. مرسی که انقدر خودمونی هستین.

مرسی از همه تون

علی شهبابی - کوثر صادقی

۱۶ فروردین ۱۴۰۲

فهرست

شماره آزمون	مبحث آزمون	صفحه سؤال	صفحه پاسخ نامه تشریحی
۱	معادله درجه اول و مسائل توصیفی	۷	۷۰
۲	معادله درجه دو (حل معادله)	۸	۷۱
۳	معادله درجه دو (مجموع، حاصل ضرب و اختلاف ریشه‌ها)	۸	۷۳
۴	معادلات گویا	۹	۷۶
۵	آزمون جامع معادلات (جامع فصل)	۱۰	۷۸
۶	آزمون جامع معادلات (به سوی صد)	۱۱	۸۲
۷	مقدمات	۱۳	۸۵
۸	تابع خطی	۱۴	۸۷
۹	تابع درجه دو	۱۵	۸۹
۱۰	مسائل min و max تابع درجه دو	۱۶	۹۱
۱۱	تابع دهم	۱۶	۹۳
۱۲	تابع ثابت، چندضابطه‌ای و همانی (۱)	۱۷	۹۵
۱۳	تابع ثابت، چندضابطه‌ای و همانی (۲)	۱۸	۹۷
۱۴	تابع پلکانی، علامت و جزء صحیح	۱۹	۹۹
۱۵	تابع قدر مطلق	۲۰	۱۰۱
۱۶	اعمال جبری روی توابع	۲۱	۱۰۴
۱۷	تابع یازدهم	۲۲	۱۰۷
۱۸	آزمون جامع تابع (جامع فصل)	۲۳	۱۱۰
۱۹	آزمون جامع تابع (به سوی صد)	۲۴	۱۱۴
۲۰	گردآوری داده‌ها	۲۶	۱۱۸
۲۱	معیارهای گرایش به مرکز	۲۷	۱۱۹
۲۲	معیارهای پراکندگی	۲۸	۱۲۱
۲۳	نمودارهای تک‌متغیره	۲۸	۱۲۳
۲۴	نمودارهای چندمتغیره	۲۹	۱۲۵
۲۵	چرخه آمار	۳۱	۱۲۶
۲۶	آمار دهم و چرخه آمار دوازدهم	۳۲	۱۲۸
۲۷	شاخص‌های آماری	۳۳	۱۲۹
۲۸	سری زمانی، درون‌یابی و برون‌یابی	۳۴	۱۳۱
۲۹	آمار یازدهم	۳۵	۱۳۳
۳۰	آزمون جامع آمار (جامع فصل)	۳۶	۱۳۵
۳۱	آزمون جامع آمار (به سوی صد)	۳۸	۱۳۸

فصل ۱: معادلات

فصل ۲: تابع

فصل ۳: آمار

شماره آزمون	مبحث آزمون	صفحه سؤال	صفحه پاسخ نامه تشریحی
۳۲	گزاره‌ها	۴۰	۱۴۱
۳۳	استدلال	۴۱	۱۴۳
۳۴	گزاره و استدلال	۴۲	۱۴۵
۳۵	شمارش ۱ (اصل جمع و ضرب، جایگشت)	۴۳	۱۴۶
۳۶	شمارش ۲ (انتخاب)	۴۳	۱۴۹
۳۷	شمارش ۳ (کل شمارش)	۴۴	۱۵۰
۳۸	احتمال ۱ (مقدمات)	۴۵	۱۵۲
۳۹	احتمال ۲ (محاسبه احتمال)	۴۶	۱۵۴
۴۰	احتمال ۳ (محاسبه احتمال)	۴۷	۱۵۶
۴۱	آزمون جامع شمارش و احتمال (جامع فصل)	۴۸	۱۵۸
۴۲	آزمون جامع شمارش و احتمال (به سوی صد)	۴۹	۱۶۱
۴۳	دنباله	۵۱	۱۶۵
۴۴	دنباله حسابی ۱ (جمله عمومی و روابط بین جملات)	۵۲	۱۶۶
۴۵	دنباله حسابی ۲ (مجموع جملات)	۵۲	۱۶۸
۴۶	دنباله هندسی ۱ (جمله عمومی و روابط بین جملات)	۵۳	۱۶۹
۴۷	دنباله هندسی ۲ (مجموع جملات)	۵۴	۱۷۱
۴۸	آزمون جامع دنباله (جامع فصل)	۵۴	۱۷۳
۴۹	آزمون جامع دنباله (به سوی صد)	۵۵	۱۷۶
۵۰	توان‌های گویا	۵۷	۱۷۹
۵۱	تابع نمایی	۵۸	۱۸۲
۵۲	جامع پایه	۶۱	۱۸۶
۵۳	جامع دوازدهم	۶۲	۱۸۹
۵۴	جامع کنکور	۶۴	۱۹۲
۵۵	جامع کنکور	۶۵	۱۹۵
۵۶	جامع کنکور	۶۷	۱۹۹
			۲۰۴

فصل ۴: منطق و استدلال

فصل ۵: شمارش و احتمال

فصل ۶: دنباله

فصل ۷: توان‌های گویا و تابع نمایی

فصل ۸: آزمون‌های جامع

پاسخ‌نامه کلیدی



۱۱

• نوع آزمون: تجمعی

• موضوع: تابع دهم

• ۱۰ تست در ۱۵ دقیقه

• صفحه کتاب درسی: ۴۰ تا ۷۰ کتاب دهم

۱۱۶- اگر رابطه $f = \{(1, a^2 + b^2), (3, |a - b|), (1, 2ab + 25), (3, c + 1)\}$ یک تابع باشد، c کدام است؟

- ۵ (۴)
- ۴ (۳)
- ۳ (۲)
- ۲ (۱)

۱۱۷- اگر برد تابع $f : \{-\frac{1}{2}, a, b\} \rightarrow \mathbb{R}$ ، مجموعه $\{5, c, 1\}$ باشد، مقدار $a + b + c$ کدام است؟

- ۴ (۴)
- ۳ (۳)
- ۲ (۲)
- ۱ (۱)



۱۱۸- در تابع خطی f ، اگر $f(2) = 11$ ، $f(-1) = 20$ و $f(k) = -13$ باشد، مقدار k کدام است؟

- ۸ (۱) ۹ (۲) ۱۰ (۳) ۱۱ (۴)

۱۱۹- دماسنجی با رابطه خطی، دمای 40° درجه سانتی‌گراد را با عدد 75 و دمای 70° درجه سانتی‌گراد را با عدد 120 نشان می‌دهد. این دماسنج دمای 2 درجه سانتی‌گراد را با چه عددی نشان می‌دهد؟

- ۱۶ (۱) ۱۷ (۲) ۱۸ (۳) ۱۹ (۴)

۱۲۰- اگر رأس سهمی‌های $f(x) = 2x^2 + bx + 7$ و $g(x) = -x^2 + 4x + c$ بر هم منطبق باشد، مقدار $b + c$ کدام است؟

- ۱۱ (۱) -۱۲ (۲) -۱۳ (۳) -۱۴ (۴)

۱۲۱- تابع خطی f از دو نقطه $(3, 5)$ و $(0, 2)$ می‌گذرد. اگر f و سهمی $g(x) = x^2$ در دو نقطه A و B متقاطع باشند، مجموع طول این دو نقطه کدام است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) -۱ (۳) -۲ (۴)

۱۲۲- سهمی $y = -x^2 + 3x + 28$ را حداقل چند واحد به چپ انتقال دهیم تا نمودار جدید در ربع اول نباشد؟

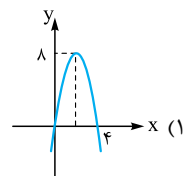
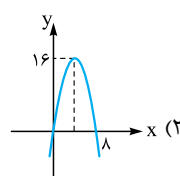
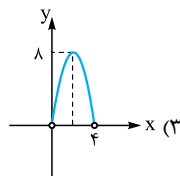
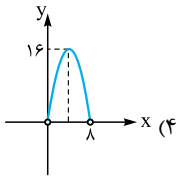
- ۴ (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴)

۱۲۳- اگر $k + 2y = \frac{x}{3}$ و بیشترین مقدار xy برابر 96 باشد، k کدام است؟ ($k > 0$)

- ۱۲ (۱) ۱۶ (۲) ۱۸ (۳) ۲۴ (۴)

۱۲۴- محیط مستطیلی 16 است. اگر اندازه یکی از اضلاع آن را با x و مساحت آن را با S نشان دهیم، کدام گزینه نمودار S بر حسب x را نشان می‌دهد؟

(کتاب درسی)



۱۲۵- تابع هزینه یک کارگاه تولیدی به ازای تولید x واحد کالا به صورت $C(x) = x^2 + 120x + 60$ است که هر واحد آن کالا را 300 تومان می‌فروشد. اگر الان این کارگاه، روزانه 80 کالا تولید کند و بفروشد، برای این که به بیشترین سود روزانه برسد باید چه تغییری در تولید خود بدهد؟

- (۱) 20 واحد کالا هر روز بیشتر تولید کند. (۲) 20 واحد کالا هر روز کم‌تر تولید کند.
(۳) 10 واحد کالا هر روز بیشتر تولید کند. (۴) 10 واحد کالا هر روز کم‌تر تولید کند.



آزمون ۱۱

۱۱۶- گزینه ۳ **کلید** به زوج مرتبها نگاه می‌کنیم. اگر در بین زوج مرتبها، زوج مرتبهایی دیدیم که مؤلفه اول یکسان دارند، مؤلفه‌های دوم آن‌ها را با یکدیگر برابر قرار می‌دهیم.

گام اول مؤلفه‌های اول دو زوج مرتب $(1, a^2 + b^2)$ و $(1, 2ab + 25)$ یکسان است، پس باید مؤلفه‌های دومشان نیز یکسان باشد:

$$a^2 + b^2 = 2ab + 25 \Rightarrow \underbrace{a^2 + b^2 - 2ab}_{\text{اتحاد مربع}} = 25$$

$$\Rightarrow (a - b)^2 = 25 \xrightarrow{\text{جذر}} |a - b| = 5$$

گام دوم با جای‌گذاری $|a - b| = 5$ ، دو زوج مرتب دیگر به شکل $(3, \underbrace{|a - b|}_5)$ ، $(3, c + 1)$ روبه‌رو می‌شوند:

مؤلفه‌های دومشان باید برابر باشد، پس: $c + 1 = 5 \Rightarrow c = 4$

۱۱۷- گزینه ۲ **گام اول** تابع $f(x)$ را برابر ۱، c و ۵ قرار می‌دهیم تا دامنه تابع به دست بیاید.

$$f(x) = 1 \Rightarrow 3 - 2x = 1 \Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow x = 1$$

$$f(x) = c \Rightarrow 3 - 2x = c \Rightarrow 2x = 3 - c$$

$$\Rightarrow x = \frac{3 - c}{2}$$

$$f(x) = 5 \Rightarrow 3 - 2x = 5 \Rightarrow 2x = -2 \Rightarrow x = -1$$

پس دامنه تابع، مجموعه $\{1, \frac{3-c}{2}, -1\}$ است.

گام دوم از طرفی در صورت سؤال، دامنه به صورت $\{\frac{-1}{2}, a, b\}$ آمده است، پس باید این دو مجموعه یکسان باشند.

$$\{1, \frac{3-c}{2}, -1\} = \{\frac{-1}{2}, a, b\}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ \frac{3-c}{2} = \frac{-1}{2} \rightarrow c = 4 \end{cases}$$

$$g(x) = -x^2 + 4x + c$$

$$\xrightarrow{x=2} g(2) = -4 + 8 + c = c + 4$$

گام چهارم باید عرض رأس‌ها هم برابر باشند:

$$-1 = c + 4 \Rightarrow c = -5$$

گام پنجم مقدار $b + c$ را به دست می‌آوریم:

$$b + c = -8 - 5 = -13$$

۱۲۱- گزینه ۱ **گام اول** شیب تابع خطی f را با استفاده از

مختصات دو نقطه $A(3, 5)$ و $B(0, 2)$ پیدا می‌کنیم:

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{2 - 5}{0 - 3} = \frac{-3}{-3} = 1$$

گام دوم معادله تابع را با استفاده از رابطه $y - y_A = m(x - x_A)$

به دست می‌آوریم: $y - 5 = 1(x - 3) \Rightarrow y = x + 2$

$$\xrightarrow{\text{پس}} f(x) = x + 2$$

گام سوم نمودار سهمی $g(x) = x^2$ و خط $f(x) = x + 2$ در

دو نقطه متقاطع هستند. ضابطه تابع $f(x)$ و $g(x)$ را برابر قرار می‌دهیم تا طول نقاط تقاطع مشخص شود:

$$f(x) = g(x) \Rightarrow x + 2 = x^2 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow (x - 2)(x + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

گام چهارم مجموع طول این دو نقطه را به دست می‌آوریم:

$$x_1 + x_2 = 2 + (-1) = 1$$

۱۲۲- گزینه ۲

گام اول ضریب x^2 در سهمی $y = -x^2 + 3x + 28$ عددی

منفی است، پس دهانه سهمی رو به پایین است.

گام دوم طول نقاط برخورد سهمی با محور x ها را حساب می‌کنیم.

باید y را صفر بدهیم:

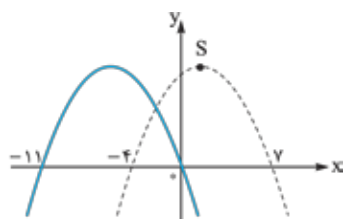
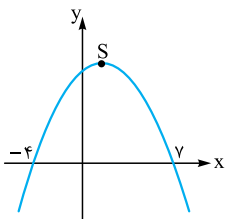
$$y = -x^2 + 3x + 28 \xrightarrow{y=0} 0 = -x^2 + 3x + 28$$

$$\xrightarrow{\text{قرینه}} x^2 - 3x - 28 = 0$$

$$\xrightarrow{\text{جمله مشترک}} (x - 7)(x + 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 7 \\ x_2 = -4 \end{cases}$$

گام سوم با همین اطلاعات سهمی

را رسم می‌کنیم:



گام چهارم برای آن‌که

سهمی در ناحیه اول

قرار نگیرد، باید حداقل

آن را ۷ واحد به چپ

بربریم:

تذکر البته حالت $a = -1$, $b = 1$, $c = 4$ هم قبول است.

گام سوم $a + b + c$ برابر است با: $a + b + c = 4$

۱۱۸- گزینه ۳ **گام اول** دو نقطه از تابع خطی را داریم:

$$A(2, 11), B(-1, 20)$$

شیب خط را به دست می‌آوریم:

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{20 - 11}{-1 - 2} = \frac{9}{-3} = -3$$

گام دوم معادله خط را پیدا می‌کنیم:

$$y - y_A = m(x - x_A) \Rightarrow y - 11 = -3(x - 2)$$

$$\Rightarrow y = -3x + 17 \xrightarrow{\text{پس}} f(x) = -3x + 17$$

گام سوم با توجه به $f(k) = -13$ داریم:

$$f(k) = -3k + 17 \Rightarrow -13 = -3k + 17 \Rightarrow 3k = 30$$

$$\Rightarrow k = 10$$

۱۱۹- گزینه ۳ **کلید ۱** دماسنج دمای 40° درجه سانتی‌گراد

را با عدد ۷۵ نشان می‌دهد: $A(40, 75)$.

■ دماسنج دمای 70° درجه سانتی‌گراد را با عدد ۱۲۰ نشان می‌دهد:

$$B(70, 120)$$

گام اول با داشتن دو نقطه، شیب خط را حساب می‌کنیم:

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{120 - 75}{70 - 40} = \frac{45}{30} = \frac{3}{2}$$

گام دوم با داشتن شیب و نقطه A ، معادله خط را می‌نویسیم:

$$y - y_A = m(x - x_A)$$

$$\xrightarrow{m = \frac{3}{2}} y - 75 = \frac{3}{2}(x - 40)$$

$$\Rightarrow y - 75 = \frac{3}{2}x - 60 \Rightarrow y = \frac{3}{2}x + 15$$

گام سوم $x = 2$ را در رابطه خطی به دست آمده، قرار می‌دهیم:

$$y = \frac{3}{2}x + 15 \xrightarrow{x=2} y = \frac{3}{2}(2) + 15 = 3 + 15 = 18$$

پس دماسنج جدید دمای 2° درجه سانتی‌گراد را با عدد ۱۸ نشان می‌دهد.

۱۲۰- گزینه ۳ **گام اول** طول رأس سهمی‌ها را به دست

می‌آوریم:

$$f(x) = 2x^2 + bx + 7 \Rightarrow x_s = \frac{-b}{2a} = \frac{-b}{4}$$

$$g(x) = -x^2 + 4x + c \Rightarrow x_s = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{-2} = 2$$

گام دوم آن‌ها را با هم برابر قرار می‌دهیم:

$$\frac{-b}{4} = 2 \Rightarrow b = -8$$

گام سوم طول رأس هر دو سهمی $x = 2$ است. $x = 2$ را در هر دو

سهمی جای گذاری می‌کنیم تا عرض رأسشان به دست آید:

$$f(x) = 2x^2 + bx + 7$$

$$\xrightarrow{x=2} f(2) = 2 \times 4 + (-8)(2) + 7$$

$$= 8 - 16 + 7 = -1$$



گام سب بیشترین سود روزانه وقتی به دست می‌آید که تعداد کالای تولیدشده برابر با طول رأس سهمی به دست آمده برای سود باشد.

$$\text{طول رأس سهمی} = \frac{-b}{2a} = \frac{-180}{2(-1)} = 90$$

پس این کارگاه باید تولید روزانه را از ۸۰ کالا به ۹۰ کالا برساند، یعنی باید روزانه ۱۰ کالا بیشتر تولید کند.

۱۲۳- گزینه ۲ **کلید** برای آن که XY ماکزیمم شود، باید در تساوی $k = 2y + \frac{x}{3}$ ، دو عبارت $\frac{x}{3}$ و $2y$ سهم‌های یکسانی از k ببرند.

گام اول یعنی هر کدام باید برابر با $\frac{k}{2}$ باشند:

$$\frac{x}{3} + 2y = k \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{3} = \frac{k}{2} \Rightarrow x = \frac{3}{2}k \\ 2y = \frac{k}{2} \Rightarrow y = \frac{k}{4} \end{cases}$$

گام دو پس ماکزیمم XY برابر است با حاصل ضرب $\frac{3}{2}k$ و $\frac{k}{4}$ که باید ۹۶ شود:

$$\left(\frac{3}{2}k\right)\left(\frac{k}{4}\right) = 96 \Rightarrow \frac{3}{8}k^2 = 96 \xrightarrow{\times \frac{8}{3}} k^2 = 96 \times \frac{8}{3} = 256 \xrightarrow{k > 0} k = 16$$

۱۲۴- گزینه ۳ **گام اول** ضلع دیگر مستطیل را y در نظر می‌گیریم. محیط مستطیل ۱۶ است، پس داریم:

$$16 = 2(x + y) \Rightarrow 8 = x + y$$

$$\xrightarrow{-y} x + y = 8$$

گام دو y را بر حسب x می‌نویسیم:

$$y = 8 - x$$

مساحت مستطیل بر حسب x برابر است با:

$$S = xy = x(8 - x) = -x^2 + 8x$$

گام سب پس باید تابع $S(x) = -x^2 + 8x$ را رسم کنیم. فقط این تابع یک سری محدودیت‌ها دارد.

- x نمی‌تواند صفر یا منفی باشد:
- $x > 0$
- y هم نمی‌تواند صفر یا منفی باشد:

$$y > 0 \Rightarrow 8 - x > 0 \Rightarrow x < 8$$

• از طرفی مقدار این تابع که مساحت را به ما می‌دهد هم باید عددی مثبت باشد. پس نتیجه می‌گیریم نمودار باید فقط در ناحیه اول باشد، یعنی جواب گزینه‌های **۳** یا **۴** است.

گام چهارم رأس سهمی $S(x) = -x^2 + 8x$ را حساب می‌کنیم:

$$x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{-8}{2(-1)} = 4$$

پس جواب گزینه (۴) است.

۱۲۵- گزینه ۳ **گام اول** تابع درآمد را می‌نویسیم:
 $R(x) = 300x \Rightarrow \text{درآمد} = \underbrace{300}_{\text{تعداد کالا}} \times \underbrace{x}_{\text{قیمت هر کالا}}$

گام دو با داشتن توابع درآمد و هزینه، تابع سود را می‌نویسیم:

$$P(x) = R(x) - C(x)$$

$$\Rightarrow P(x) = 300x - (x^2 + 120x + 60)$$

$$= 300x - x^2 - 120x - 60$$

$$\Rightarrow P(x) = -x^2 + 180x - 60$$

۱۷۶- نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax - 1 & x \geq 1 \\ ax + b & x < 1 \end{cases}$ محور x ها را در نقطه‌ای به طول ۵ و محور y ها را در نقطه‌ای به عرض ۶ قطع می‌کند. مقدار $f(\frac{b}{a})$ کدام است؟

- ۱۶ (۴) ۱۴ (۳) ۱۲ (۲) ۱۰ (۱)

۱۷۷- در تابع همانی f رابطه $f(\frac{a-1}{a+1}) = \frac{f(a+1)}{f(a-3)}$ برقرار است. برد کدام یک از توابع زیر تک‌عضوی است؟

- $g(x) = (2a-1)x + 2$ (۴) $g(x) = (2a+1)x - 1$ (۳) $g(x) = (3a-1)x + 2$ (۲) $g(x) = (3a+1)x - 1$ (۱)

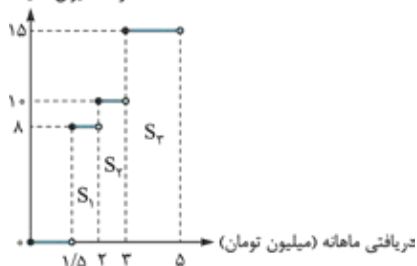
۱۷۸- کدام گزینه تابع پلکانی نیست؟

- $t(x) = |x| - x$ (۴) $h(x) = \frac{2x}{|x|}$ (۳) $g(x) = \text{sign}(x) + 1$ (۲) $f(x) = [2x]$ (۱)

۱۷۹- با توجه به نمودار مقابل، شخصی که ۳۲۰۰۰۰ تومان در ماه مالیات پرداخت می‌کند، ماهانه چه قدر حقوق می‌گیرد؟

- ۳/۸ میلیون تومان (۱)
۴ میلیون تومان (۲)
۴/۲ میلیون تومان (۳)
۴/۴ میلیون تومان (۴)

درصد میزان مالیات

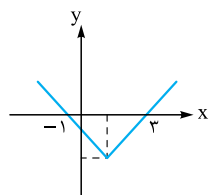


۱۸۰- اگر $f(x) = [2x - \frac{x}{y}] - \text{sign}(x+3) + ax$ و $f(\frac{1}{y}) = -20$ باشد، a کدام است؟

- ۶ (۴) -۳ (۳) ۶ (۲) ۳ (۱)

۱۸۱- نمودار تابع $f(x) = |x+a| + b$ به صورت مقابل است. مقدار $f(\frac{b}{a})$ کدام است؟

- ۱ (۱)
۲ (۲)
-۱ (۳)
صفر (۴)



۱۸۲- برای رسم نمودار تابع $y_1 = 3|2 - \frac{x}{y}|$ از روی نمودار $y_2 = -|x+2|$ باید ابتدا نمودار y_2 را واحد به سمت برد و سپس آن را نسبت به محور قرینه کرد.

- ۸، راست، x ها (۱) ۴، چپ، y ها (۲) ۴، راست، x ها (۳) ۸، چپ، y ها (۴)

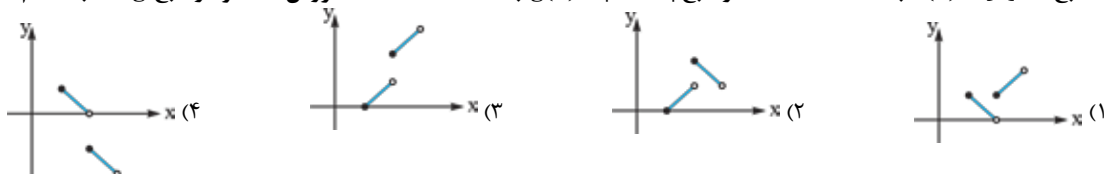
۱۸۳- توابع $f = \{(1, a), (-3, 9), (4, b+1)\}$ و $g = \{(-3, b+a), (2, b), (1, -2)\}$ مفروض‌اند. اگر $3g - f$ تابعی همانی باشد، مقدار $a+b$ کدام است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۱۸۴- توابع $f(x) = 2[x]$ با دامنه $-2 \leq x < 1$ و $g(x) = \text{sign}(x) - 1$ با دامنه $-1 \leq x \leq 3$ مفروض‌اند. مجموع اعضای برد تابع $f+g$ کدام است؟

- ۳ (۱) -۴ (۲) -۵ (۳) -۶ (۴)

۱۸۵- تابع $f(x) = [x] - 1$ با دامنه $0 \leq x < 3$ و تابع $g(x) = |x-2|$ با دامنه $1 \leq x \leq 5$ مفروض‌اند. نمودار تابع $f-g$ به کدام صورت است؟





۱۷۷- گزینه ۲ نکته ۱ ضابطه تابع همانی به صورت $f(x) = x$ است.

نکته ۲ تابعی که برد آن فقط یک عضو دارد، تابع ثابت است و ضابطه آن به صورت $f(x) = c$ می‌باشد.

گام اول تابع f همانی است، پس جای تمام $f(\text{cloud})$ ها، قرار می‌دهیم:

$$f\left(\frac{a-1}{a+1}\right) = \frac{a-1}{a+1}$$

$$f(a+1) = a+1$$

$$f(a-3) = a-3$$

گام دو مقادیر به دست آمده را در رابطه $f\left(\frac{a-1}{a+1}\right) = \frac{f(a+1)}{f(a-3)}$ جای گذاری می‌کنیم:

$$f\left(\frac{a-1}{a+1}\right) = \frac{f(a+1)}{f(a-3)} \Rightarrow \frac{a-1}{a+1} = \frac{a+1}{a-3}$$

$$\frac{\text{مربع دوجمله‌ای}}{\text{طرفین وسطین}} \rightarrow \frac{(a+1)(a+1)}{(a+1)(a+1)} = \frac{\text{جمله مشترک}}{(a-1)(a-3)}$$

$$\Rightarrow a^2 + 2a + 1 = a^2 - 4a + 3 \Rightarrow 6a = 2 \Rightarrow a = \frac{1}{3}$$

کلید ۱ دنبال یک تابع ثابت می‌گردیم. ضابطه این تابع به شکل $f(x) = c$ است. یعنی ضریب x باید صفر باشد.

گام سه مقدار $a = \frac{1}{3}$ را در گزینه‌ها جای گذاری می‌کنیم:

۱ ثابت نیست. $g(x) = 2x - 1 \rightarrow$

۲ ثابت است. $g(x) = 2 \rightarrow$

۳ ثابت نیست. $g(x) = \frac{5}{3}x - 1 \rightarrow$

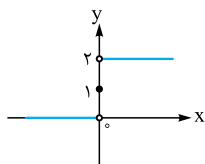
۴ ثابت نیست. $g(x) = \frac{-x}{3} + 2 \rightarrow$

۱۷۸- گزینه ۲ هر گزینه را در یک گام چک می‌کنیم:

گام اول تمام توابع به فرم $f(x) = [\text{cloud}]$ پلکانی هستند، پس

تابع $f(x) = [2x]$ نیز پلکانی است.

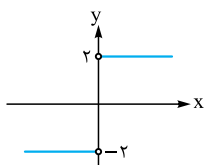
گام دو تابع $g(x) = \text{sign}(x) + 1$ همان تابع علامت است که یک واحد به بالا منتقل شده.



این تابع هم پلکانی است.

گام سه برای ساده کردن تابع $h(x) = \frac{2x}{|x|}$ ، با توجه به ریشه داخل قدرمطلق که $x = 0$ است آن را با دو دامنه $x > 0$ و $x < 0$ می‌نویسیم:

$$h(x) = \frac{2x}{|x|} = \begin{cases} \frac{2x}{x} & x > 0 \\ \frac{2x}{-x} & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 2 & x > 0 \\ -2 & x < 0 \end{cases}$$



ضابطه‌هایش تابع ثابت هستند، پس پلکانی است. نمودارش را هم ببینید:

آزمون ۱۷

۱۷۶- گزینه ۲ گام اول تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax - 1 & x \geq 1 \\ ax + b & x < 1 \end{cases}$

محور عرض‌ها را در نقطه‌ای به عرض ۶ قطع می‌کند، یعنی نقطه $(0, 6)$ روی آن است یا به زبان دیگر $f(0) = 6$. برای محاسبه $f(0)$ سراغ ضابطه پایینی می‌رویم:

$$x < 1: f(x) = ax + b \xrightarrow{x=0} f(0) = b$$

پس $b = 6$ است.

ضابطه f تا این جا به صورت $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax - 1 & x \geq 1 \\ ax + 6 & x < 1 \end{cases}$

درآمد.

گام دو محور x ها را در نقطه‌ای به طول ۵ قطع می‌کند، یعنی $f(5) = 0$ است.

برای محاسبه $f(5)$ سراغ ضابطه بالایی می‌رویم:

$$x \geq 1: f(x) = x^2 + ax - 1 \xrightarrow{x=5} f(5) = 25 + 5a - 1 = 15 + 5a$$

$$= 15 + 5a$$

$$15 + 5a = 0 \Rightarrow a = -3$$

با $15 + 5a$ باید صفر باشد.

با جای گذاری $a = -3$ ، ضابطه f به صورت زیر می‌شود:

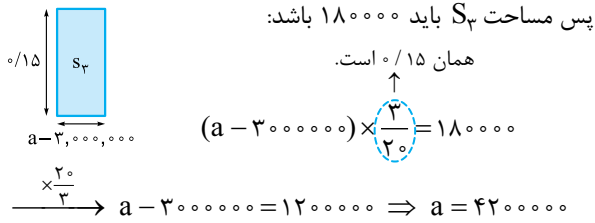
$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x - 1 & x \geq 1 \\ -3x + 6 & x < 1 \end{cases}$$

$$\frac{b}{a} = \frac{6}{-3} = -2$$

گام سه مقدار $\frac{b}{a}$ برابر است با:

برای محاسبه مقدار $f(-2)$ باید سراغ ضابطه پایینی برویم:

$$x < 1: f(x) = -3x + 6 \xrightarrow{x=-2} f(-2) = 6 + 6 = 12$$



گزینه ۱۸۰ - گام اول مقدار عبارت براکتی را به ازای $x = \frac{-1}{3}$ حساب می‌کنیم:

$$[2x - [\frac{x}{3}]] = [2(\frac{-1}{3}) - [\frac{-1}{3}]] = [\frac{-2}{3} - [\frac{-1}{3}]] = [\frac{-2}{3} - \frac{-1}{3}] = [\frac{-2}{3} + \frac{1}{3}] = [\frac{-1}{3}] = [-3 / \dots] = -4$$

گام دوم مقدار $\text{sign}(x+3)$ را به ازای $x = \frac{-1}{3}$ حساب می‌کنیم:

$$\text{sign}(\frac{-1}{3} + 3) = \text{sign}(\frac{10}{3}) = \text{sign}(\text{عدد مثبت}) = 1$$

گام سوم با توجه به تساوی $f(\frac{-1}{3}) = -20$ داریم:

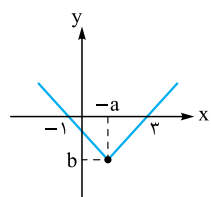
$$f(x) = [2x - [\frac{x}{3}]] - \text{sign}(x+3) + ax + 1$$

$$\xrightarrow{x = \frac{-1}{3}} f(\frac{-1}{3}) = -4 - 1 + a(\frac{-1}{3}) + 1$$

$$\Rightarrow -20 = -4 - \frac{1}{3}a \Rightarrow \frac{1}{3}a = 16 \Rightarrow a = 16 \times \frac{3}{1} = 48$$

گزینه ۱۸۱ - کلید ریشه داخل قدرمطلق، طول نقطه

شکستگی تابع را به ما می‌دهد: $x+a=0 \Rightarrow x=-a$
داخل قدرمطلق



گام اول به ازای $x = -a$ ، مقدار تابع برابر b می‌شود. پس مختصات نقطه شکستگی $(-a, b)$ است:

گام دوم با توجه به متقارن بودن این تابع، میانگین ریشه‌ها یعنی -1 و 3 برابر با طول نقطه شکستگی یعنی $-a$ است، پس:

$$-a = \frac{-1+3}{2} \Rightarrow -a = 1 \Rightarrow a = -1$$

با جای‌گذاری $a = -1$ ، ضابطه به شکل $f(x) = |x-1| + b$ درمی‌آید.

گام سوم نمودارمان از نقطه $(3, 0)$ می‌گذرد، پس:

$$f(3) = 0 \Rightarrow |3-1| + b = 0 \Rightarrow 2 + b = 0 \Rightarrow b = -2$$

ضابطه کامل شد: $f(x) = |x-1| - 2$

گام چهارم سؤال مقدار $f(\frac{b}{a})$ یعنی $f(\frac{-2}{-1})$ یا همان $f(2)$ را

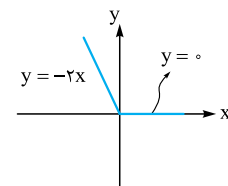
$$f(2) = |2-1| - 2 = 1 - 2 = -1$$
 می‌خواهد:

گام چهارم تابع $t(x) = |x| - x$ هم یک عبارت قدرمطلق دارد که ریشه‌اش $x = 0$ است. مثل گام ۳ دوضابطه‌ای می‌شود:

$$t(x) = |x| - x = \begin{cases} x - x & x \geq 0 \\ -x - x & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & x \geq 0 \\ -2x & x < 0 \end{cases}$$

ثابت نیست.

چون یکی از ضابطه‌ها تابع ثابت نیست، پس پلکانی نیست.



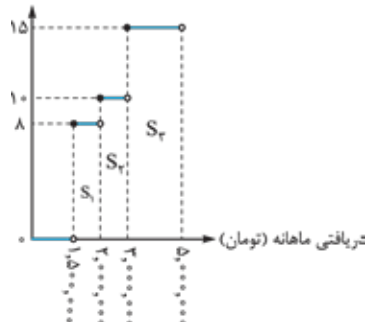
نمودارش هم به شکل مقابل است:

گزینه ۱۷۹ - کلید اگر دنبال حقوقی باشیم که مالیاتش

تومان 320000 است باید دنبال x باشیم که تا آن‌جا، مجموع مساحت‌های بین زیر نمودار تا محور x ها، 320000 شده باشد.

گام اول مساحت مستطیل‌ها را تک‌تک حساب می‌کنیم:

درصد میزان مالیات



$$S_1 = (200000 - 150000) \times 0.08 = 50000 \times 0.08 = 40000$$

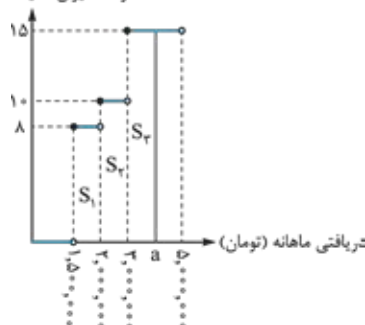
$$S_2 = (300000 - 200000) \times 0.1 = 100000 \times 0.1 = 100000$$

$$S_3 = (500000 - 300000) \times 0.15 = 200000 \times 0.15 = 300000$$

گام دوم مجموع S_1 تا S_3 می‌شود 440000 تومان.

چون از 320000 بیشتر شد، پس باید بخشی از S_3 را می‌گیریم. فرض کنیم عدد مورد نظر عددی مثل a بین 3 و 5 میلیون باشد:

درصد میزان مالیات



گام سوم باید جمع مساحت S_1 تا S_3 ، 320000 شود:

$$S_1 + S_2 + S_3 = 320000 \Rightarrow S_3 = 180000$$



گام سیم با توجه به دامنه‌های تابع g ، تابع f را هم به همان شکل (از نظر دامنه) می‌نویسیم:

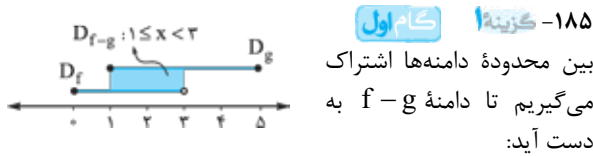
$$f(x) = 2[x] = \begin{cases} 2(0) & 0 < x < 1 \\ 2(0) & x = 0 \\ 2(-1) & -1 \leq x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & 0 < x < 1 \\ 0 & x = 0 \\ -2 & -1 \leq x < 0 \end{cases}$$

گام چهارم حالا توابع f و g را جمع می‌کنیم:

$$(f+g)(x) = \begin{cases} 0+0 & 0 < x < 1 \\ 0+(-1) & x = 0 \\ -2+(-2) & -1 \leq x < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & 0 < x < 1 \\ -1 & x = 0 \\ -4 & -1 \leq x < 0 \end{cases}$$

گام پنجم برد تابع $f+g$ ، سه عضو دارد: $\{0, -1, -4\}$ مجموع اعضای بردش برابر ۵- است.



گام دوم با توجه به ضابطه توابع f و g ، در دو محدوده $1 \leq x < 2$ و $2 \leq x < 3$ ، ضابطه $f-g$ را تشکیل می‌دهیم:

بین ۱ و ۲

$$\begin{aligned} 1 \leq x < 2: (f-g)(x) &= f(x) - g(x) = [x] - 1 + |x-2| \\ &= 1 - 1 + (-x + 2) = -x + 2 \end{aligned}$$

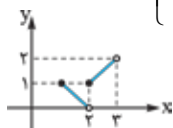
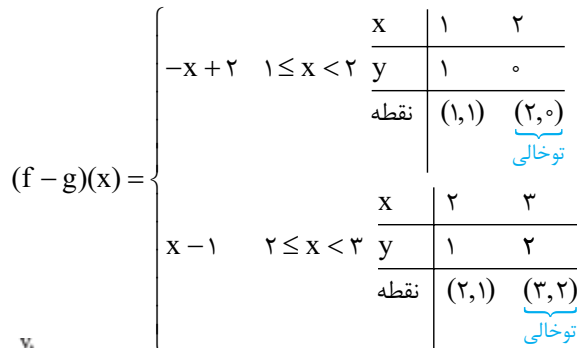
بین ۲ و ۳

$$\begin{aligned} 2 \leq x < 3: (f-g)(x) &= f(x) - g(x) = [x] - 1 + |x-2| \\ &= 2 - 1 + (x - 2) = x - 1 \end{aligned}$$

$$(f-g)(x) = \begin{cases} -x+2 & 1 \leq x < 2 \\ x-1 & 2 \leq x < 3 \end{cases}$$

پس:

گام سیم هر خط را به کمک نقاط ابتدا و انتهای دامنه‌اش رسم می‌کنیم:



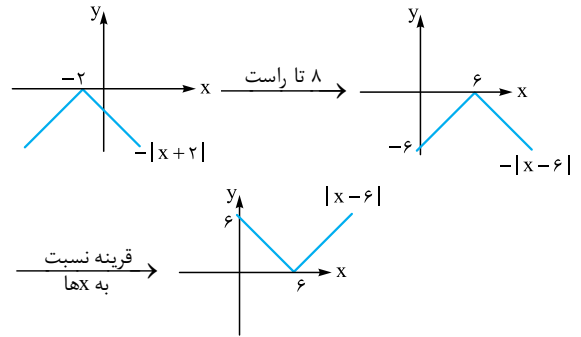
۱۸۲- گزینه ۱ نکته $|-A| = |A|$

گام اول ابتدا ضابطه y_1 را ساده می‌کنیم:

نکته

$$y_1 = 3 \left| 2 - \frac{x}{3} \right| = |6 - x| = |-(x-6)| = |x-6|$$

گام دوم برای آن که از نمودار تابع $y_2 = -|x+2|$ به $y_1 = |x-6|$ برسیم باید ابتدا ۸ واحد به راست برویم و سپس نمودار را نسبت به محور x ها قرینه کنیم.



۱۸۳- گزینه ۲ نکته ضابطه تابع همانی به شکل $f(x) = x$ است.

گام اول دامنه تابع $3g-f$ از اشتراک دامنه تابع f و g به دست می‌آید:

$$D_{3g-f} = D_f \cap D_g = \{1, -3\}$$

گام دوم مقدار تابع $3g-f$ را به ازای $x = 1$ و $x = -3$ به دست می‌آوریم:

$$x = -3: 3g(-3) - f(-3) = 3(b+a) - 9 = 3b + 3a - 9$$

$$x = 1: 3g(1) - f(1) = 3(-2) - a = -6 - a$$

گام سیم نمایش زوج مرتبی $3g-f$ به صورت زیر است:

$$\{(-3, 3b + 3a - 9), (1, -6 - a)\}$$

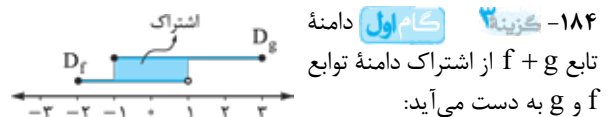
گام چهارم تابع $3g-f$ همانی است، پس مؤلفه‌های اول و دوم هر زوج مرتب آن برابرند:

$$(1, -6 - a) \Rightarrow -6 - a = 1 \Rightarrow a = -7$$

$$(-3, 3b + 3a - 9) \Rightarrow 3b + 3a - 9 = -3 \Rightarrow 3b = 27$$

$$\Rightarrow b = 9$$

گام پنجم مقدار $a+b$ برابر است با: $a+b = -7+9 = 2$



$$D_{f+g} = D_f \cap D_g = (-1 \leq x < 1)$$

در محدوده $-1 \leq x < 1$ توابع $f(x) = 2[x]$ و $g(x) = \text{sign}(x) - 1$ را به صورت چندضابطه‌ای می‌نویسیم.

گام دوم اول تابع g :

$$g(x) = \begin{cases} 1-1 & 0 < x < 1 \\ 0-1 & x = 0 \\ -1-1 & -1 \leq x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & 0 < x < 1 \\ -1 & x = 0 \\ -2 & -1 \leq x < 0 \end{cases}$$

۴۴۶- به چند طریق می توان ۸ توپ متفاوت را بین ۵ نفر تقسیم کرد؟

$$P(8, 5) \quad (1) \quad C(8, 5) \quad (2) \quad 5^8 \quad (3) \quad 8^5 \quad (4)$$

۴۴۷- قرار است ۶ دوست با دو ماشین که ظرفیت هر کدام ۳ نفر می باشد به سفر بروند. اگر ۳ نفرشان گواهی نامه داشته باشند، به چند طریق می توانند داخل ماشین ها قرار گیرند؟ (هر ماشین دو صندلی در جلو و یکی در عقب دارد.)

$$3^6 \quad (1) \quad 96 \quad (2) \quad 108 \quad (3) \quad 144 \quad (4)$$

۴۴۸- با ارقام ۰ تا ۸ چند عدد چهاررقمی بدون ارقام تکراری و مضرب ۵ می توانیم بنویسیم که ارقام آن یکی در میان زوج و فرد باشد؟

$$96 \quad (1) \quad 84 \quad (2) \quad 108 \quad (3) \quad 92 \quad (4)$$

۴۴۹- با ارقام ۰ تا ۷ چند عدد سه رقمی می توان نوشت که در آن ها حداقل دو رقم تکراری باشد؟

$$150 \quad (1) \quad 152 \quad (2) \quad 154 \quad (3) \quad 156 \quad (4)$$

۴۵۰- حاصل عبارت $\frac{70 \times 9! - 90 \times 8!}{56 \times 6! + 88 \times 7!}$ کدام است؟

$$40 \quad (1) \quad 45 \quad (2) \quad 50 \quad (3) \quad 60 \quad (4)$$

۴۵۱- به چند طریق می توان با ۷ شاخه گل متفاوت، یک دسته گل شامل ۲ یا ۳ یا ۴ گل درست کرد؟

$$89 \quad (1) \quad 91 \quad (2) \quad 93 \quad (3) \quad 95 \quad (4)$$

۴۵۲- مجموعه $\{1, 2, 3, \dots, 9\}$ چند زیرمجموعه دارد که همه اعضای آن زوج باشند؟

$$15 \quad (1) \quad 16 \quad (2) \quad 17 \quad (3) \quad 18 \quad (4)$$

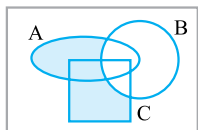
۴۵۳- ۴ دانش آموز به همراه پدرهایشان می خواهند عکس یادگاری بگیرند. در چند حالت هر پدر کنار فرزندش قرار دارد؟

$$374 \quad (1) \quad 384 \quad (2) \quad 394 \quad (3) \quad 304 \quad (4)$$

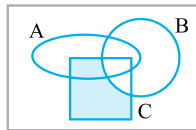
۴۵۴- در کیسه های ۳ مهره آبی، ۴ مهره قرمز و ۶ مهره سبز وجود دارد. به چند طریق می توانیم ۳ مهره از این کیسه خارج کنیم به طوری که دقیقاً ۲ مهره آن هم رنگ باشند؟

$$169 \quad (1) \quad 179 \quad (2) \quad 189 \quad (3) \quad 199 \quad (4)$$

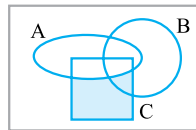
۴۵۵- اگر A ، B و C سه مجموعه باشند، کدام گزینه عبارت $(A \cup C)' - B$ را به درستی نشان می دهد؟



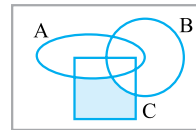
(۴)



(۳)



(۲)



(۱)

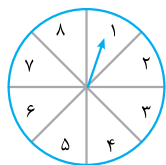
۴۵۶- از بین اعداد طبیعی کوچک تر از ۲۹، مضارب ۸ را حذف می کنیم. از اعداد باقی مانده یکی را انتخاب می کنیم. با چه احتمالی عدد انتخاب شده عددی اول است؟

$$0/28 \quad (1) \quad 0/32 \quad (2) \quad 0/36 \quad (3) \quad 0/4 \quad (4)$$

۴۵۷- در پرتاب دو تاس با چه احتمالی یکی از اعداد، مضرب دیگری است؟

$$\frac{5}{9} \quad (1) \quad \frac{7}{12} \quad (2) \quad \frac{11}{18} \quad (3) \quad \frac{2}{3} \quad (4)$$

۴۵۸- صفحه عقربه دار زیر به ۸ ناحیه مساوی تقسیم شده است. عقربه این صفحه را می چرخانیم و همزمان ۲ سکه پرتاب می کنیم. با چه احتمالی عقربه روی عددی اول می ایستد و سکه ها متفاوت می آیند؟



$$\frac{3}{16} \quad (1) \quad \frac{1}{4} \quad (2) \quad \frac{5}{16} \quad (4) \quad \frac{1}{8} \quad (3)$$



۴۵۹- آرتین ۴ کتاب ریاضی، ۳ کتاب تاریخ و ۵ کتاب فیزیک دارد. آرتین ۳ تا از این کتاب‌ها را انتخاب می‌کند و در کیفش می‌گذارد. با چه احتمالی حداکثر ۲ کتاب فیزیک برداشته است؟

$$\frac{21}{22} (1) \quad \frac{10}{11} (2) \quad \frac{19}{22} (3) \quad \frac{9}{11} (4)$$

۴۶۰- ۴ نفر سوار یک تاکسی هستند. با چه احتمالی ماه تولد حداقل دو نفر آن‌ها یکسان است؟

$$\frac{41}{96} (1) \quad \frac{55}{96} (2) \quad \frac{89}{144} (3) \quad \frac{55}{144} (4)$$

۴۶۱- با حروف کلمه **brazil** یک کلمه ۶ حرفی می‌سازیم. با چه احتمالی حروف صدادار کنار هم و حروف بی‌صدا نیز کنار هم قرار دارند؟

$$\frac{4}{15} (1) \quad \frac{2}{15} (2) \quad \frac{1}{15} (3) \quad \frac{1}{30} (4)$$

۴۶۲- با چه احتمالی علی و استادش در یک فصل ولی در ماه‌های متفاوتی به دنیا آمده‌اند؟

$$\frac{1}{4} (1) \quad \frac{1}{6} (2) \quad \frac{1}{8} (3) \quad \frac{1}{12} (4)$$

۴۶۳- با ارقام ۱ تا ۵ یک عدد ۴ رقمی بدون ارقام تکراری می‌نویسیم. با چه احتمالی رقم اول و آخر آن هر دو فرد یا هر دو زوج هستند؟

$$\frac{0}{36} (1) \quad \frac{0}{4} (2) \quad \frac{0}{42} (3) \quad \frac{0}{48} (4)$$

۴۶۴- در یک کلاس ورزشی ۱۰ نفره، ۴ نفر دوبه‌دو برادرند. می‌خواهیم ۴ نفر از بین آن‌ها انتخاب کنیم. با چه احتمالی دو برادر در آن‌ها هستند و دو برادر دیگر نیستند؟

$$\frac{1}{6} (1) \quad \frac{1}{7} (2) \quad \frac{1}{8} (3) \quad \frac{1}{10} (4)$$

۴۶۵- یک هتل در طبقه دوم خود، ۴ اتاق خالی در یک سمت راهرو و ۳ اتاق خالی در سمت دیگر راهرو دارد. ۷ بازیکن فوتبال می‌خواهند هر کدام در یکی از اتاق‌ها ساکن شوند. با چه احتمالی اتاق ایمان، عرفان و علی (۳ نفر از ۷ بازیکن) کنار هم می‌افتد؟

$$\frac{1}{35} (1) \quad \frac{2}{35} (2) \quad \frac{3}{35} (3) \quad \frac{4}{35} (4)$$

• نوع آزمون: جامع فصل (به سوی صد)

• موضوع: آزمون جامع شمارش و احتمال

۴۲

• ۱۵ تست در ۲۵ دقیقه

• صفحه کتاب درسی: ۲ تا ۲۷ کتاب دوازدهم

۴۶۶- در چند عدد سه‌رقمی، بزرگ‌ترین رقم ۷ و کوچک‌ترین رقم ۲ است؟

$$30 (1) \quad 31 (2) \quad 32 (3) \quad 33 (4)$$

۴۶۷- چند مثلث می‌توان رسم کرد که رئوس آن‌ها روی نقاط شکل مقابل واقع باشند؟



$$81 (1) \quad 82 (2) \quad 83 (3) \quad 84 (4)$$

۴۶۸- اگر یک عضو به مجموعه A اضافه کنیم، به تعداد زیرمجموعه‌های ۳ عضوی‌اش ۲۸ واحد اضافه می‌شود. این مجموعه در ابتدا چند عضو داشته است؟

$$7 (1) \quad 8 (2) \quad 9 (3) \quad 10 (4)$$

۴۶۹- در تساوی $\binom{26}{k} = \binom{26}{k+6}$ ، مجموع مقادیر ممکن برای k کدام است؟

$$5 (1) \quad 6 (2) \quad 7 (3) \quad 8 (4)$$

۴۷۰- می‌خواهیم از بین ۲ دانش‌آموز دهم، ۴ دانش‌آموز یازدهم و ۵ دانش‌آموز دوازدهم، یک تیم والیبال ۶ نفره انتخاب کنیم به طوری که کاپیتان تیم از پایه دوازدهم و پاسور از پایه یازدهم باشد. این کار را به چند طریق می‌توانیم انجام دهیم؟

$$2340 (1) \quad 2400 (2) \quad 2480 (3) \quad 2520 (4)$$

۴۷۱- از هر ۶ مدرسه برتر کشور، ۳ نفر در اردویی شرکت دارند. می‌خواهیم یک گروه ۴ نفره از بینشان انتخاب کنیم به طوری که هیچ دو نفری از یک مدرسه نباشند. این کار به چند طریق امکان‌پذیر است؟

$$720 (1) \quad 900 (2) \quad 1050 (3) \quad 1215 (4)$$

۴۷۲- ۶ نفر قرار است برای یک جلسه دور یک میزگرد بنشینند. در چند حالت دو شخص خاص کنار هم نیستند؟

$$60 (1) \quad 64 (2) \quad 68 (3) \quad 72 (4)$$

۴۷۳- کدام پیشامدها همواره ناسازگارند؟

$$(A \cap B)', A - B \quad (۱)$$

$$A \cap B', A \cup B \quad (۲)$$

$$A' \cap B', B - A \quad (۳)$$

$$A' - B', A' \cup B \quad (۴)$$

۴۷۴- با ارقام ۰ تا ۶ یک عدد چهاررقمی بدون تکرار ارقام می‌نویسیم، با چه احتمالی این عدد مضرب ۵ و بزرگ‌تر از ۳۰۰۰ است؟

$$\frac{2}{9} \quad (۱)$$

$$\frac{7}{36} \quad (۲)$$

$$\frac{5}{24} \quad (۳)$$

$$\frac{1}{4} \quad (۴)$$

۴۷۵- ۱۵ مهره داریم که رنگ بعضی از آن‌ها سفید و رنگ بعضی سیاه است. ۲ مهره به تصادف از بینشان انتخاب می‌کنیم. احتمال این که رنگ

مهره‌ها متفاوت باشد، $\frac{18}{35}$ است. تعداد مهره‌های سیاه کدام می‌تواند باشد؟

$$7 \quad (۱)$$

$$8 \quad (۲)$$

$$9 \quad (۳)$$

$$10 \quad (۴)$$

۴۷۶- در پرتاب ۴ تاس با چه احتمالی دقیقاً اعداد ۲ تاس یکسان است؟

$$\frac{1}{3} \quad (۱)$$

$$\frac{4}{9} \quad (۲)$$

$$\frac{5}{9} \quad (۳)$$

$$\frac{2}{3} \quad (۴)$$

۴۷۷- قرار است ۶ نفر در یک مراسم سخنرانی کنند. با چه احتمالی دقیقاً دو نفر بین شخص A و شخص B، سخنرانی می‌کنند؟

$$\frac{1}{6} \quad (۱)$$

$$\frac{1}{8} \quad (۲)$$

$$\frac{1}{9} \quad (۳)$$

$$\frac{1}{10} \quad (۴)$$

۴۷۸- در یک جمع سه‌نفره با چه احتمالی ماه‌های تولد در سه فصل متفاوت است؟

$$\frac{1}{8} \quad (۱)$$

$$\frac{1}{9} \quad (۲)$$

$$\frac{1}{12} \quad (۳)$$

$$\frac{1}{16} \quad (۴)$$

۴۷۹- احتمال رخ دادن پیشامد A، دو برابر احتمال رخ ندادن پیشامد B است. اگر احتمال آن که حداقل یکی از دو پیشامد A یا B رخ دهد، ۸۲ درصد و احتمال رخ دادن هر دو پیشامد ۵۰ درصد باشد، با چه احتمالی فقط B رخ می‌دهد؟

$$0/12 \quad (۱)$$

$$0/14 \quad (۲)$$

$$0/16 \quad (۳)$$

$$0/18 \quad (۴)$$

۴۸۰- علی، رضا و محمد می‌خواهند روی ۳ تا از صندلی‌های سالن بنشینند. با چه احتمالی در ردیف‌های متفاوتی می‌نشینند؟

$$\frac{1}{11} \quad (۱)$$

$$\frac{2}{11} \quad (۲)$$

ردیف اول

۱	۲	۳
---	---	---

ردیف دوم

۴	۵	۶	۷
---	---	---	---

ردیف سوم

۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
---	---	----	----	----

$$\frac{3}{11} \quad (۳)$$

$$\frac{4}{11} \quad (۴)$$

گام دوم ۴ نفر باقی مانده را در ۴ صندلی باقی مانده قرار می دهیم:

$$\frac{3}{\text{صندلی جلوی ماشین دوم}} \times \frac{2}{\text{صندلی جلوی ماشین اول}} \times \frac{4}{\text{صندلی عقب ماشین دوم}} \times \frac{3}{\text{صندلی عقب ماشین اول}} = 144$$

$$\frac{3}{\text{صندلی جلوی ماشین دوم}} \times \frac{2}{\text{صندلی جلوی ماشین اول}} \times \frac{4}{\text{صندلی عقب ماشین دوم}} \times \frac{3}{\text{صندلی عقب ماشین اول}} = 144$$

گزینه ۱ - کلید عدد باید مضرب ۵ باشد، پس یکان یا صفر است یا ۵. ارقام یکی در میان زوج و فرد هستند. یعنی با توجه به یکان، ارقامی که در جایگاه هزارگان، صدگان و دهگان هستند را پیدا می کنیم.

گام اول اگر یکان عدد صفر باشد، صدگان زوج است، ولی هزارگان و دهگان فرد هستند. یعنی داریم:

ارقام فرد
به جز عددی که
در هزارگان است. صفر

$$\frac{7,5,3,1}{\text{هزارگان}} \times \frac{8,6,4,2}{\text{صدگان}} \times \frac{3}{\text{دهگان}} \times \frac{1}{\text{یکان}} = 48$$

گام دوم اگر یکان عدد ۵ باشد، صدگان فرد است، ولی هزارگان و دهگان زوج هستند. یعنی داریم:

رقمی که در هزارگان
است حذف می شود
ولی صفر می تواند
این جا قرار گیرد.

$$\frac{8,6,4,2}{\text{هزارگان}} \times \frac{7,3,1}{\text{صدگان}} \times \frac{4}{\text{دهگان}} \times \frac{5}{\text{یکان}} = 48$$

گام سوم مجموع دو حالت برابر است با: $48 + 48 = 96$

گزینه ۳ - کلید به جای این که همه حالت های مطلوب را حساب کنیم، تعداد حالت های نامطلوب را از کل حالت ها کم می کنیم. حالت نامطلوب وقتی به وجود می آید که هیچ رقم تکراری نداشته باشیم.

گام اول تعداد کل عددهای سه رقمی که می توان با ارقام ۰ تا ۷ ساخت، برابر است با:

$$\frac{7}{\text{صدگان}} \times \frac{8}{\text{دهگان}} \times \frac{8}{\text{یکان}}$$

گام دوم تعداد کل اعدادی که در آن ها هیچ رقم تکراری وجود ندارد، برابر است با:

صفر می تواند باشد،
ولی رقمی که در صدگان
است حذف می شود.
صدگان صفر نیست.

$$\frac{7}{\text{صدگان}} \times \frac{7}{\text{دهگان}} \times \frac{6}{\text{یکان}}$$

گام سوم تعداد حالت های مطلوب برابر است با:

$$7 \times \underbrace{8 \times 8}_{64} - 7 \times \underbrace{7 \times 6}_{42} = 7(64 - 42) = 7 \times 22 = 154$$

آزمون ۴۱

گزینه ۳ - کلید هر توپ را به ۵ نفر می توانیم بدهیم، پس برای هر توپ ۵ انتخاب داریم. تعداد توپ ها برابر ۸ است، پس تعداد تمام حالت های ممکن برابر است با: $5^8 = 5 \times 5 \times \dots \times 5$

گزینه ۲ - کلید صندلی های راننده محدودیت دارند، پس اول از آن ها شروع می کنیم: ۳ نفر گواهی نامه دارند، پس برای صندلی راننده ها به ترتیب ۳ و ۲ حالت داریم:

$$\frac{3}{\text{صندلی جلوی ماشین دوم}} \times \frac{2}{\text{صندلی جلوی ماشین اول}} \times \frac{3}{\text{صندلی عقب ماشین اول}} \times \frac{2}{\text{صندلی عقب ماشین دوم}} =$$

$$\frac{3}{\text{صندلی جلوی ماشین دوم}} \times \frac{2}{\text{صندلی جلوی ماشین اول}} \times \frac{3}{\text{صندلی عقب ماشین اول}} \times \frac{2}{\text{صندلی عقب ماشین دوم}} =$$



۴۵۴- گزینه ۳ **کلید** برای آن که دقیقاً ۲ مهره هم رنگ باشند، سه حالت داریم:

- ۱) ۲ مهره آبی و ۱ مهره قرمز یا سبز باشد.
- ۲) ۲ مهره قرمز و ۱ مهره آبی یا سبز باشد.
- ۳) ۲ مهره سبز و ۱ مهره آبی یا قرمز باشد.

گام اول اگر ۲ مهره آبی و ۱ مهره قرمز یا سبز باشد، آن گاه داریم: مجموع قرمزها و سبزها

$$\binom{3}{2} \times \binom{10}{1} = 3 \times 10 = 30$$

گام دوم اگر ۲ مهره قرمز و ۱ مهره آبی یا سبز باشد، آن گاه داریم: مجموع آبی‌ها و سبزها

$$\binom{4}{2} \times \binom{9}{1} = \frac{4 \times 3}{2} \times 9 = 54$$

گام سوم اگر ۲ مهره سبز و ۱ مهره آبی یا قرمز باشد، آن گاه داریم: مجموع آبی‌ها و قرمزها

$$\binom{6}{2} \times \binom{7}{1} = \frac{6 \times 5}{2} \times 7 = 105$$

گام چهارم تعداد همه حالت‌ها برابر است با: $30 + 54 + 105 = 189$

۴۵۵- گزینه ۱ نکته $(A \cup B)' = A' \cap B'$

نکته ۲ $A - B = A \cap B'$

گام اول به کمک نکته ۱، عبارت $(A \cup C)'$ را ساده می‌کنیم:

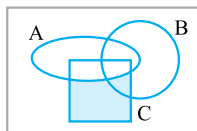
$(A \cup C)' = A' \cap C'$

گام دوم جای $A' \cap C$ می‌نویسیم $C \cap A'$ و بعد از نکته ۲

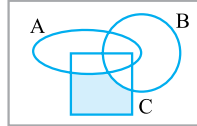
$C \cap A' = C - A$ استفاده می‌کنیم:

گام سوم ساده‌شده عبارت به صورت زیر است:

$$\underbrace{(A \cup C)'}_{C-A} - B = (C - A) - B$$



گام چهارم اول $C - A$ را مشخص می‌کنیم:



گام پنجم حالا از قسمت رنگی، ناحیه‌ای که در B قرار دارد را هم حذف می‌کنیم تا به $(C - A) - B$ برسیم:

۴۵۶- گزینه ۳ **گام اول** از اعداد طبیعی کوچک‌تر از ۲۹ (یعنی ۱ تا ۲۸)، مضارب ۸ را حذف می‌کنیم و اعداد باقی‌مانده را می‌نویسیم:

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 25, 26, 27, 28\}$$

تعداد این اعداد $n(S) = 25$ است.

گام دوم اعداد اول آن‌ها را می‌نویسیم:

$$A = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23\} \Rightarrow n(A) = 9$$

گام سوم احتمال آن که عدد انتخابی اول باشد برابر است با:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{9}{25} = \frac{9 \times 4}{25 \times 4} = 0/36$$

۴۵۰- گزینه ۲ **گام اول** صورت کسر $\frac{70 \times 9! - 90 \times 8!}{56 \times 6! + 88 \times 7!}$ را ساده‌تر می‌نویسیم:

$$70 \times 9! - 90 \times 8! = 7 \times \overbrace{10 \times 9!}^{10!} - 10 \times \overbrace{9 \times 8!}^{10!} = 7 \times 10! - 10! = 10! \times (7 - 1) = 10! \times 6$$

گام دوم مخرج کسر را ساده‌تر می‌نویسیم:

$$56 \times 6! + 88 \times 7! = \overbrace{8 \times 7 \times 6!}^{8!} + \overbrace{11 \times 8 \times 7!}^{8!} = 8! + 11 \times 8! = 8! \times (1 + 11) = 8! \times 12$$

گام سوم حاصل کسر برابر است با:

$$\frac{10 \times 9}{8! \times 12} = \frac{10 \times 9}{2} = 45$$

۴۵۱- گزینه ۲ **گام اول** اگر دسته گل شامل ۲ شاخه گل باشد، باید ۲ شاخه از ۷ شاخه انتخاب کنیم:

$$\binom{7}{2} = \frac{7 \times 6}{2} = 21$$

گام دوم اگر دسته گل شامل ۳ شاخه گل باشد، آن گاه داریم:

$$\binom{7}{3} = \frac{7 \times 6 \times 5}{6! \times 3!} = \frac{7 \times 6 \times 5}{6} = 35$$

گام سوم اگر دسته گل شامل ۴ شاخه گل باشد، آن گاه داریم:

$$\binom{7}{4} = \frac{7 \times 6 \times 5}{6! \times 3!} = \frac{7 \times 6 \times 5}{6} = 35$$

گام چهارم مجموع همه حالت‌ها برابر است با: $21 + 35 + 35 = 91$

۴۵۲- گزینه ۱ **کلید** در این مجموعه اعداد ۲، ۴، ۶ و ۸ زوج هستند.

زیرمجموعه‌هایی که فقط شامل این اعداد هستند می‌توانند ۱ عضوی یا ۲ عضوی یا ۳ عضوی یا ۴ عضوی باشند.

تعداد زیرمجموعه‌ها برابر است با:

$$\binom{4}{1} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4} = 4 + 6 + 4 + 1 = 15$$

۴ عضوی یا ۳ عضوی یا ۲ عضوی یا ۱ عضوی

۴۵۳- گزینه ۲ **گام اول** هر فرزند را به همراه پدرش در یک بسته قرار می‌دهیم:

فرزند ۴ و پدر ۴, فرزند ۳ و پدر ۳, فرزند ۲ و پدر ۲, فرزند ۱ و پدر ۱

گام دوم تعداد حالت‌هایی که این ۴ بسته را می‌توانیم کنار هم قرار دهیم برابر است با:

$$4! = 24$$

گام سوم داخل هر بسته، جای پدر و فرزند می‌تواند عوض شود، پس داخل هر بسته ۲! حالت داریم.

گام چهارم تعداد کل حالات برابر است با:

$$\begin{matrix} \text{داخل بسته‌ها} \\ \uparrow \\ 4! \times (2!)^4 = 24 \times 16 = 384 \\ \downarrow \\ \text{بسته‌ها} \end{matrix}$$



۴۵۷- گزینه ۲ **گام اول** تعداد کل حالات در پرتاب دو تاس را

حساب می‌کنیم: $n(S) = \frac{6}{\text{تاس دوم}} \times \frac{6}{\text{تاس اول}} = 36$

گام دوم در جدول زیر خانه‌هایی که یکی از تاس‌ها مضرب دیگری است را تیک می‌زنیم:

تاس ۱ \ تاس ۲	۱	۲	۳	۴	۵	۶
۱	✓	✓	✓	✓	✓	✓
۲	✓	✓		✓		✓
۳	✓		✓			✓
۴	✓	✓		✓		
۵	✓				✓	
۶	✓	✓	✓			✓

پس تعداد حالات مطلوب $n(A) = 22$ است.

گام سوم احتمال وقوع پیشامد A برابر است با:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{22}{36} = \frac{11}{18}$$

۴۵۸- گزینه ۲ **گام اول** تعداد اعضای فضای نمونه برابر است با:

$$n(S) = \frac{8}{\text{عقره}} \times \frac{2}{\text{سکه ۱}} \times \frac{2}{\text{سکه ۲}} = 32$$

گام دوم حالات مطلوب عقره و سکه‌ها را می‌نویسیم:

۴ حالت $\Rightarrow \{2, 3, 5, 7\}$: عقره روی عدد اول بایستد

۲ حالت $\Rightarrow \{رپ, پر\}$: سکه‌ها متفاوت باشند

پس تعداد کل حالات مطلوب برابر است با:

$$n(A) = \frac{4}{\text{عقره}} \times \frac{2}{\text{سکه‌ها}} = 8$$

گام سوم احتمال وقوع A برابر است با:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$$

۴۵۹- گزینه ۱ **کلید** با توجه به کلمه «حداکثر» چک می‌کنیم

که اگر با احتمال متمم سؤال را حل کنیم راحت‌تر است یا خیر.

متمم پیشامد «حداکثر ۲ کتاب فیزیک» پیشامد

«هر ۳ کتاب فیزیک باشند» است که محاسبه آن راحت‌تر است.

گام اول تعداد کل حالات انتخاب ۳ کتاب از بین ۴+۳+۵ کتاب برابر است با:

$$n(S) = \binom{12}{3} = \frac{12!}{9!3!} = \frac{12 \times 11 \times 10}{3 \times 2} = 220$$

گام دوم برای حساب کردن تعداد اعضای A' باید هر سه کتاب انتخابی فیزیک باشند.

در کل ۵ کتاب فیزیک داریم که باید ۳ تایی آن‌ها را انتخاب کنیم:

$$n(A') = \binom{5}{3} = 10$$

گام سوم احتمال وقوع A' را حساب می‌کنیم:

$$P(A') = \frac{n(A')}{n(S)} = \frac{10}{220} = \frac{1}{22}$$

گام چهارم احتمال وقوع A برابر است با:

$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{1}{22} = \frac{21}{22}$$

۴۶۰- گزینه ۱ **کلید** با توجه به کلمه «حداقل» باید از

احتمال متمم استفاده کنیم.

گام اول متمم پیشامد «ماه تولد حداقل دو نفر یکسان است»

پیشامد «ماه تولد همه افراد متفاوت است» می‌باشد.

گام دوم تعداد کل حالات برابر است با:

$$n(S) = 12^4 = 12 \times 12 \times 12 \times 12 = 20736$$

گام سوم برای آن‌که ماه تولدها متفاوت باشد، نفر اول ۱۲ حالت،

نفر دوم ۱۱ حالت و نفر سوم و چهارم به ترتیب ۱۰ و ۹ حالت دارند:

$$n(A') = \frac{12}{\text{نفر اول}} \times \frac{11}{\text{نفر دوم}} \times \frac{10}{\text{نفر سوم}} \times \frac{9}{\text{نفر چهارم}} = 11880$$

گام چهارم احتمال وقوع A' را حساب می‌کنیم:

$$P(A') = \frac{n(A')}{n(S)} = \frac{11880}{20736} = \frac{55}{96}$$

گام پنجم احتمال وقوع A برابر است با:

$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{55}{96} = \frac{41}{96}$$

۴۶۱- گزینه ۲ **گام اول** تعداد کل کلمات ۶ حرفی که با حروف

کلمه brazil می‌توان نوشت، برابر است با: $n(S) = 6!$

گام دوم حروف a و i باید کنار هم قرار بگیرند. حروف b, r, z, l و

i هم باید کنار هم باشند. یعنی داریم:

$$a, i \text{ و } b, r, z, l \Rightarrow n(A) = 2!4!2! = 4 \times 4!$$

گام سوم P(A) برابر است با:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4 \times 4!}{6!} = \frac{4}{6 \times 5} = \frac{2}{15}$$

۴۶۲- گزینه ۲ **گام اول** تعداد اعضای فضای نمونه را به دست

$$n(S) = \frac{12}{\text{استاد}} \times \frac{12}{\text{می‌آوریم}}$$



- تعداد حالات مطلوب برابر است با: $n(A) = 15 + 15 = 30$
گام سب احتمال وقوع A برابر است با:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{30}{210} = \frac{1}{7}$$

۴۶۵ - **گزینه ۲** **گام اول** در کل ۷ اتاق خالی و ۷ نفر داریم، پس $n(S) = 7!$
 تعداد کل حالات برابر است با:

گام سب شکل اتاقها به صورت مقابل است:

(A) (B) (C) (D)

(E) (F) (G) برای آن که ایمن، عرفان و علی کنار هم باشند، باید یکی از حالات زیر رخ دهد:

(۱) این ۳ نفر در اتاقهای A, B و C باشند (۳!) و چهار نفر دیگر در ۴ اتاق دیگر (۴!): $3! \times 4!$

(۲) این ۳ نفر در اتاقهای B, C و D باشند (۳!) و چهار نفر دیگر در ۴ اتاق دیگر (۴!): $3! \times 4!$

(۳) این ۳ نفر در اتاقهای E, F و G باشند (۳!) و چهار نفر دیگر در ۴ اتاق دیگر (۴!): $3! \times 4!$

مجموع حالات مطلوب برابر است با:

$$n(A) = 3 \times (3! \times 4!)$$

گام سب احتمال وقوع A برابر است با:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3 \times 3! \times 4!}{7!} = \frac{3 \times 6 \times 24}{5 \times 6 \times 7} = \frac{3}{35}$$

آزمون ۴۲

۴۶۶ - **گزینه ۱** **کلید** سه حالت مختلف داریم که همه آنها را بررسی می‌کنیم:

(۱) رقم تکراری نداشته باشیم.

(۲) دو تا رقم ۲ داشته باشیم.

(۳) دو تا رقم ۷ داشته باشیم.

گام اول دو رقم ۲ و ۷ را که داریم. اگر رقم تکراری نداشته باشیم، رقم سوم از بین اعداد ۳، ۴، ۵ و ۶ انتخاب می‌شود:

$$\binom{4}{1} = 4$$

حالا سه رقم را داریم و باید آن‌ها را کنار هم قرار دهیم: $3! = 6$

پس تعداد اعداد در این حالت برابر است با: $4 \times 6 = 24$

گام سب دو رقم ۲ و یک رقم ۷ داشته باشیم. اعداد را می‌نویسیم:

۷۲۲, ۲۷۲, ۲۲۷
حالت ۳

گام سب دو رقم ۷ و یک رقم ۲ داشته باشیم. اعداد را می‌نویسیم:

۷۷۲, ۷۲۷, ۲۷۷
حالت ۳

گام چهارم تعداد کل حالات برابر است با: $24 + 3 + 3 = 30$

گام سب در یک فصل یکسان ولی در ماه‌های متفاوت به دنیا آمده‌اند، یعنی داریم:

انتخاب یک فصل

$$n(A) = \binom{4}{1} \times \frac{3}{\text{ماه تولد علی}} \times \frac{2}{\text{ماه تولد استادش}} = 24$$

$$P(A) = \frac{24}{12 \times 12} = \frac{1}{6} \quad \text{گام سب} \quad P(A) \text{ برابر است با:}$$

۴۶۳ - **گزینه ۲** **گام اول** تعداد کل اعداد ۴ رقمی بدون تکرار ارقام که با ارقام ۱ تا ۵ می‌توان نوشت، برابر است با:

$$n(S) = 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$$

گام سب می‌خواهیم رقم اول و آخر هر دو فرد یا هر دو زوج باشد. دو حالت داریم:

- رقم اول و آخر فرد باشد:

$$\frac{5 \text{ یا } 3}{\text{فرد به جز هزارگان}} \times \frac{3}{\text{صدگان}} \times \frac{2}{\text{دهگان}} \times \frac{2}{\text{یکان}} = 36$$

- رقم اول و آخر زوج باشد:

$$\frac{4 \text{ یا } 2}{\text{زوج به جز هزارگان}} \times \frac{3}{\text{صدگان}} \times \frac{2}{\text{دهگان}} \times \frac{1}{\text{یکان}} = 12$$

گام سب مجموع دو حالت برابر است با:

$$n(A) = 36 + 12 = 48$$

گام چهارم احتمال وقوع A برابر است با:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{48}{120} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

۴۶۴ - **گزینه ۲** **گام اول** در کل ۴ نفر از بین ۱۰ نفر انتخاب می‌کنیم:

$$n(S) = \binom{10}{4} = \frac{10!}{6!4!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{4 \times 3 \times 2} = 210$$

گام سب برادرها را با « A_1, A_2 » و « B_1, B_2 » نشان می‌دهیم. برای آن که دو برادر باشند و دو برادر دیگر نباشند، دو حالت داریم:

- A_1 و A_2 انتخاب شوند و B_1 و B_2 انتخاب نشوند:

$$A_1, A_2, \underbrace{\bigcirc, \bigcirc}_{\substack{\text{باید از بین} \\ \text{نفر باقی‌مانده} \\ \text{انتخاب شوند}}} \Rightarrow \binom{6}{2} = \frac{6 \times 5}{2} = 15$$

- B_1 و B_2 انتخاب شوند و A_1 و A_2 انتخاب نشوند:

$$B_1, B_2, \underbrace{\bigcirc, \bigcirc}_{\substack{\text{باید از بین} \\ \text{نفر باقی‌مانده} \\ \text{انتخاب شوند}}} \Rightarrow \binom{6}{2} = \frac{6 \times 5}{2} = 15$$

گام سب کسر به دست آمده در گام ۲، ۲۸ واحد از کسر گام ۱ بیشتر است، پس:

$$\frac{(n+1)n(n-1)}{6} - \frac{n(n-1)(n-2)}{6} = 28$$

$$\xrightarrow{\times 6} (n+1)n(n-1) - n(n-1)(n-2) = 168$$

گام چهارم در سمت چپ از $n(n-1)$ فاکتور می‌گیریم:

$$(n+1)\underbrace{n(n-1)} - \underbrace{n(n-1)}(n-2) = 168$$

$$\Rightarrow n(n-1)\underbrace{((n+1) - (n-2))}_3 = 168$$

$$\Rightarrow 3n(n-1) = 168$$

$$\xrightarrow{\div 3} n(n-1) = 56 \Rightarrow n^2 - n - 56 = 0$$

$$\xrightarrow{\text{جمله مشترک}} (n-8)(n+7) = 0 \Rightarrow \begin{cases} n = 8 \checkmark \\ n = -7 \times \end{cases}$$

گزینه ۲ نکته $\binom{n}{a} = \binom{n}{b}$ اگر باشد، آن‌گاه یا $a = b$ یا $a + b = n$ است

گام اول با توجه به نکته، از تساوی $\binom{26}{k+6} = \binom{26}{4k}$ دوتا نتیجه می‌توانیم بگیریم:

$4k = k + 6 \Rightarrow 3k = 6 \Rightarrow k = 2$ و $k + 6 = 4k$ برابرند: $k = 2$ و $4k = k + 6$ می‌شود ۲۶:

$$4k + k + 6 = 26 \Rightarrow 5k = 20 \Rightarrow k = 4$$

گام دوم مجموع مقادیر k برابر است با:

$$2 + 4 = 6$$

گزینه ۳ کلید بعد از انتخاب کاپیتان و پاسور، ۴ نفر دیگر تیم را از بین نفرات باقی‌مانده انتخاب می‌کنیم.

گام اول کاپیتان از بین ۵ نفر پایه دوازدهم انتخاب می‌شود:

$$\binom{5}{1} = 5$$

گام دوم پاسور از بین ۴ نفر پایه یازدهم انتخاب می‌شود:

$$\binom{4}{1} = 4$$

گام سب در کل $2 + 4 + 5 = 11$ بازیکن داریم که ۲ تای آن‌ها به عنوان پاسور و کاپیتان انتخاب شده‌اند. حالا باید از بین ۹ نفر باقی‌مانده، ۴ نفر انتخاب کنیم:

$$\binom{9}{4} = \frac{9!}{5!4!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 126$$

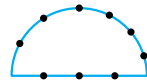
گام چهارم حالا تعداد حالات مراحل را طبق اصل ضرب در هم ضرب می‌کنیم:

$$5 \times 4 \times 126 = 2520$$

گزینه ۴ کلید اول ۴ مدرسه از ۶ مدرسه انتخاب می‌کنیم:

$$\binom{6}{4} = \frac{6!}{4!2!} = 15$$

گزینه ۲ روش ۱ گام اول ما باید از بین ۹ نقطه روی شکل، ۳ نقطه انتخاب کنیم که روی یک امتداد نباشند:



۳ حالت داریم:

« ۳ نقطه از روی قوس »

حالت ۱

یا « ۲ نقطه از روی قوس و ۱ نقطه از قطر »

حالت ۲

« ۱ نقطه از روی قوس و ۲ نقطه از قطر »

حالت ۳

گام دوم حالت ۱ ۳ نقطه از بین ۶ نقطه روی قوس انتخاب کنیم:

$$\binom{6}{3} = \frac{6!}{3!3!} = \frac{6 \times 5 \times 4}{3!} = 20$$

حالت ۲ « ۲ نقطه از بین ۶ نقطه روی قوس » و « ۱ نقطه از بین ۳ نقطه روی قطر »:

$$\binom{6}{2} \times \binom{3}{1} = \frac{6 \times 5}{2} \times 3 = 45$$

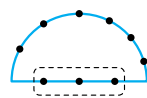
حالت ۳ « ۱ نقطه از بین ۶ نقطه روی قوس » و « ۲ نقطه از بین ۳ نقطه روی قطر »:

$$\binom{6}{1} \times \binom{3}{2} = 6 \times 3 = 18$$

گام سب روش ۲ مجموع حالات بالا برابر است با: $20 + 45 + 18 = 83$ از روش متمم استفاده می‌کنیم:

گام اول در کل ۹ نقطه داریم. ۳ تای آن را انتخاب می‌کنیم:

$$\binom{9}{3} = \frac{9!}{6!3!} = \frac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2} = 84$$



گام دوم حالا حالت‌هایی که ۳ نقطه روی یک امتداد می‌افتند را می‌شماریم که فقط ۱ حالت می‌شود:

گام سب پس تعداد حالات قابل قبول، $84 - 1 = 83$ می‌شود.

گزینه ۲ کلید تعداد اعضای اولیه A را n می‌گیریم:

تعداد زیرمجموعه‌های سه‌عضوی مجموعه A در حالت اول $\binom{n}{3}$ بوده است. یک عضو به مجموعه A اضافه شده، تعداد زیرمجموعه‌های سه‌عضوی برابر با $\binom{n+1}{3}$ می‌شود.

گام اول تعداد زیرمجموعه‌های ۳ عضوی‌اش برابر است با:

$$\binom{n}{3} = \frac{n!}{(n-3)!3!} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$$

گام دوم اگر یک عضو به اعضای A اضافه کنیم، تعداد اعضایش $n+1$ می‌شود و تعداد زیرمجموعه‌های ۳ عضوی‌اش برابر است با:

$$\begin{aligned} \binom{n+1}{3} &= \frac{(n+1)!}{(n+1-3)!3!} = \frac{(n+1)!}{(n-2)! \times 6} \\ &= \frac{(n+1)n(n-1)}{6} \end{aligned}$$



۴۷۴- گزینه ۲ کلید فضای نمونه، همه اعداد ۴ رقمی بدون تکرار با ارقام ۰ تا ۶ است. از بین این اعداد، مضربی از ۵ که بزرگتر از ۳۰۰۰ باشند، حالت‌های مطلوب هستند.

کام اول تعداد کل اعداد ۴ رقمی بدون ارقام تکراری که با ارقام ۰ تا ۶ می‌توان نوشت را حساب می‌کنیم:

$$n(S) = \frac{6}{ه} \times \frac{6}{ص} \times \frac{5}{د} \times \frac{4}{ی} = 720$$

کام دو تعداد اعداد مضرب ۵ بزرگتر از ۳۰۰۰ را به دست می‌آوریم. یکان باید ۰ یا ۵ باشد. دو حالت را جداگانه حساب می‌کنیم:

(۱) یکان صفر باشد:

$$\frac{4}{ه} \times \frac{5}{ص} \times \frac{4}{د} \times \frac{1}{ی} = 80$$

(۲) یکان ۵ باشد:

$$\frac{3}{ه} \times \frac{5}{ص} \times \frac{4}{د} \times \frac{1}{ی} = 60$$

پس تعداد حالات مطلوب برابر است با: $n(A) = 80 + 60 = 140$. **کام سه** احتمال را به دست می‌آوریم:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{140}{720} = \frac{7}{36}$$

۴۷۵- گزینه ۳ کام اول در کل ۱۵ مهره داریم و ۲ تای آن‌ها را انتخاب می‌کنیم:

$$n(S) = \binom{15}{2} = \frac{15 \times 14}{2} = 105$$

کام دو فرض کنیم k مهره سیاه داریم. پس تعداد مهره‌های سفید $15 - k$ می‌شود.

برای آن که دو مهره انتخاب شده متفاوت باشد باید ۱ مهره سیاه و ۱ مهره سفید انتخاب کنیم، پس:

$$n(A) = \binom{k}{1} \times \binom{15-k}{1} = k(15-k)$$

کام سه احتمال وقوع پیشامد A را حساب می‌کنیم:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{k(15-k)}{105}$$

کام چهار کسر بالا باید با $\frac{18}{35}$ برابر باشد:

$$\frac{k(15-k)}{105} = \frac{18}{35} \xrightarrow{\times 3} k(15-k) = 54$$

$$\Rightarrow 15k - k^2 = 54 \Rightarrow k^2 - 15k + 54 = 0$$

$$\xrightarrow{\text{جمله مشترک}} (k-9)(k-6) = 0 \Rightarrow \begin{cases} k=6 \\ k=9 \end{cases}$$

پس تعداد مهره‌های سیاه ۶ یا ۹ بوده است.

۴۷۶- گزینه ۲ کام اول تعداد اعضای فضای نمونه در پرتاب ۴ تاس برابر است با:

$$n(S) = \frac{6}{\text{تاس ۱}} \times \frac{6}{\text{تاس ۲}} \times \frac{6}{\text{تاس ۳}} \times \frac{6}{\text{تاس ۴}} = 6^4$$

کام دو از هر کدام از ۴ مدرسه انتخاب شده، ۱ نفر انتخاب می‌کنیم:

$$\binom{3}{1} \binom{3}{1} \binom{3}{1} \binom{3}{1} = 3^4 = 81$$

کام سه تعداد حالت‌ها برابر است با: $15 \times 81 = 1215$

۴۷۲- گزینه ۳ نکته تعداد حالات قرار گرفتن n نفر، دور یک میز گرد برابر با $(n-1)!$ است.

کلید حساب کردن تعداد همه حالت‌های مطلوب وقت‌گیر است، پس تعداد همه حالت‌های ممکن را به دست می‌آوریم و حالت‌های نامطلوب را حذف می‌کنیم.

کام اول تعداد حالت‌های قرار گرفتن ۶ نفر دور یک میز گرد برابر است با: $(6-1)! = 5! = 120$

کام دو حالا دو نفری که قرار است کنار هم باشند را در یک بسته قرار می‌دهیم:

$$\underbrace{a, b, c, d, e, f}_{5 \text{ تا}}$$

تعداد حالت‌های قرار گرفتن ۶ نفر دور میز گرد به طوری که دو شخص خاص در کنار هم برابر است با: $(5-1)! \cdot 2! = 4! \cdot 2! = 48$

کام سه تعداد حالت‌های مطلوب برابر است با: $120 - 48 = 72$

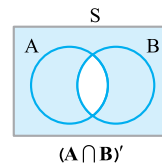
۴۷۳- گزینه ۳ کلید پیشامدهای گزینه‌ها را روی نمودار ون نشان می‌دهیم. هر دو پیشامدی که اشتراکی نداشتند، ناسازگارند.

$$A - B = A \cap B' \quad \text{نکته ۱}$$

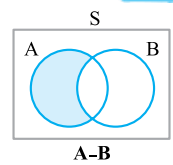
$$(A \cap B)' = A' \cup B' \quad \text{و} \quad (A \cup B)' = A' \cap B' \quad \text{نکته ۲}$$

در هر گام یکی از گزینه‌ها را روی نمودار ون نشان می‌دهیم:

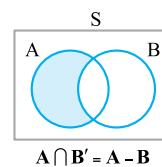
کام اول اشتراک دارند:



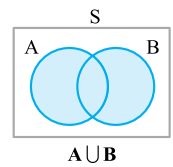
و



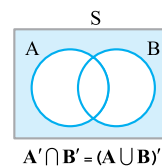
کام دو اشتراک دارند:



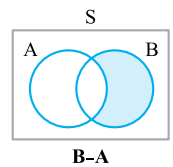
و



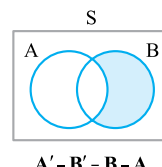
کام سه اشتراک ندارند، پس ناسازگارند:



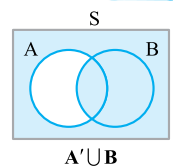
و



کام چهار اشتراک دارند:



و



۴۷۹- گزینه ۱ نکته ۱

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

حداقل یکی رخ دهد. هر دو رخ دهند.

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$

فقط A رخ دهد.

گام اول احتمال رخ دادن A (یعنی P(A))، ۲ برابر احتمال رخ ندادن B (یعنی P(B')) است، پس:

$$P(A) = 2P(B') \Rightarrow P(A) = 2 - 2P(B)$$

۱-P(B)

گام دوم

- احتمال رخ دادن حداقل یکی از دو پیشامد A یا B، ۸۲ درصد است، پس:

$$P(A \cup B) = 0.82$$

- احتمال رخ دادن هر دو پیشامد A و B با هم، ۵۰ درصد است، پس:

$$P(A \cap B) = 0.50$$

- داده‌ها را در فرمول جای‌گذاری می‌کنیم:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

۰/۸۲ ۲-۲P(B) ۰/۵

$$\Rightarrow 0.82 = 2 - 2P(B) + P(B) - 0.5$$

$$\Rightarrow 0.82 = 1.5 - P(B) \Rightarrow P(B) = 0.68$$

گام سوم احتمال آن که فقط B رخ دهد را حساب می‌کنیم:

$$P(B - A) = P(B) - P(A \cap B) = 0.68 - 0.5 = 0.18$$

فقط B رخ دهد.

۴۸۰- گزینه ۳ گام اول ۳ نفر می‌خواهند روی این ۱۲ صندلی بنشینند. تعداد کل حالات برابر است با:

$$n(S) = \frac{12}{علی} \times \frac{11}{رضا} \times \frac{10}{محمد}$$

گام دوم

- از ردیف اول که ۳ صندلی دارد، یکی را انتخاب می‌کنیم: $\binom{3}{1}$

- از ردیف دوم که ۴ صندلی دارد، یکی را انتخاب می‌کنیم: $\binom{4}{1}$

- از ردیف سوم که ۵ صندلی دارد، یکی را انتخاب می‌کنیم: $\binom{5}{1}$

- حالا باید این ۳ نفر را در ۳ صندلی که در مراحل قبل انتخاب کردیم، قرار دهیم که ۳! حالت دارد. پس تعداد حالات مطلوب برابر است با:

$$n(A) = \binom{3}{1} \times \binom{4}{1} \times \binom{5}{1} \times 3! = 3 \times 4 \times 5 \times 6$$

گام سوم احتمال وقوع A برابر است با:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3 \times 4 \times 5 \times 6}{12 \times 11 \times 10} = \frac{6}{22} = \frac{3}{11}$$

گام اول از ۴ تاس، ۲ تاس را انتخاب می‌کنیم: $\binom{4}{2}$ می‌خواهیم اعداد این ۲ تاس یکسان باشد، پس اولی ۶ حالت و دومی ۱ حالت دارد: 6×1

تاس سوم باید عدد تاس اول و دوم نباشد، یعنی ۵ حالت دارد. تاس چهارم هم باید دو عدد قبلی نباشد، یعنی ۴ حالت دارد.

$$n(A) = \binom{4}{2} \times 6 \times 1 \times 5 \times 4 = 6 \times 6 \times 5 \times 4$$

پس:

گام سوم احتمال وقوع A برابر است با:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6 \times 6 \times 5 \times 4}{6 \times 6 \times 6 \times 6} = \frac{20}{36} = \frac{5}{9}$$

۴۷۷- گزینه ۱ گام اول تعداد کل حالات برای سخنرانی این ۶ نفر برابر است با:

$$n(S) = \frac{6}{ششم} \times \frac{5}{پنجم} \times \frac{4}{چهارم} \times \frac{3}{سوم} \times \frac{2}{دوم} \times \frac{1}{اول} = 6!$$

گام دوم

- برای آن که دقیقاً ۲ نفر بین A و B، سخنرانی کنند، ابتدا ۲ نفر از ۴ نفر باقی‌مانده را انتخاب می‌کنیم: $\binom{4}{2}$

- چون سؤال مشخص نکرده A جلوتر از B است یا B جلوتر از A، پس جابه‌جایی A و B نیز ۲! حالت دارد.

- حالا با ۳ بسته روبه‌روییم که خودشان می‌توانند جابه‌جا شوند و ۳! حالت دارند:



پس در کل تعداد حالاتی که قرار است بین A و B دقیقاً ۲ نفر سخنرانی کنند برابر است با:

$$\binom{4}{2} \times 2! \times 3! = 6 \times 2 \times 6 = 72$$

گام سوم احتمال وقوع A برابر است با:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{72}{6!} = \frac{72}{720} = \frac{1}{10}$$

۴۷۸- گزینه ۱ گام اول تعداد اعضای فضای نمونه را به دست می‌آوریم:

$$n(S) = \frac{12}{نفر سوم} \times \frac{12}{نفر دوم} \times \frac{12}{نفر اول} = 12^3$$

گام دوم فصل ۳ فصل ۴ انتخاب می‌کنیم: $\binom{4}{3} = 4$ در هر فصل از بین ۳ ماه باید یکی را انتخاب کنیم:

$$\binom{3}{1} \times \binom{3}{1} \times \binom{3}{1} = 3^3$$

پس تعداد حالات مطلوب برابر است با:

$$n(A) = 4 \times 3^3 = 4 \times 3 \times 3 \times 3 = 12 \times 3 \times 3$$

گام سوم احتمال وقوع پیشامد A برابر است با:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{12 \times 3 \times 3}{12 \times 12 \times 12} = \frac{1}{16}$$